Лекция 3

3.1 Задачи динамики машин

Динамика изучает движение с учетом действия сил инерции и инерционных свойств тел. В этом ее отличие от кинематики, которая занимается изучением собственных свойств движения и имеет вспомогательное значение при решении динамических задач.

В динамике машин, как и в общей динамике, следует различать две задачи, прямую и обратную.

Прямая задача состоит в том, что по заданным силам находится закон движения звеньев.

Обратная задача состоит в том, что по заданному закону движения находятся силы, вызвавшие это движение.

В математическом отношении прямая задача сводится к интегрированию дифференциальных уравнений, обратная задача – к дифференцированию или к простому решению алгебраических уравнений.

К прямым задачам относятся рассматриваемые здесь задачи об истинном движении механизма, о регулировании хода машины, задача о маховике, к обратным задачам – силовое исследование механизма, уравновешивание роторов и механизмов. Динамические задачи можно решить лишь в том случае, если известны силы или известны движения. Поэтому в самом начале следует четко определить тип решаемой задачи.

3.2 Классификация сил в механизмах

При работе на механизм действуют силы различной природы, поэтому целесообразно произвести их классификацию.

P – движущая сила

Движущей называется сила, которая приложена к механизму со стороны двигателя и вызывает движение механизма. Движущая сила совершает положительную работу, так как ее направление всегда совпадает с направлением перемещения. Звено, к которому приложена движущая сила, называется ведущим. Движущая сила (момент), как правило, является функцией угловой скорости. Такая функция носит название механической характеристики двигателя.

Q – сила полезного сопротивления

Силой полезного сопротивления называется сила, для преодоления которой предназначен механизм. Она приложена к выходному звену со стороны внешних объектов. Природа этой силы может быть различной: сила резания, сила трения, сила упругости, сила гидравлического сопротивления и т.д. Работа силы полезного сопротивления всегда отрицательна.

F – сила вредного сопротивления.

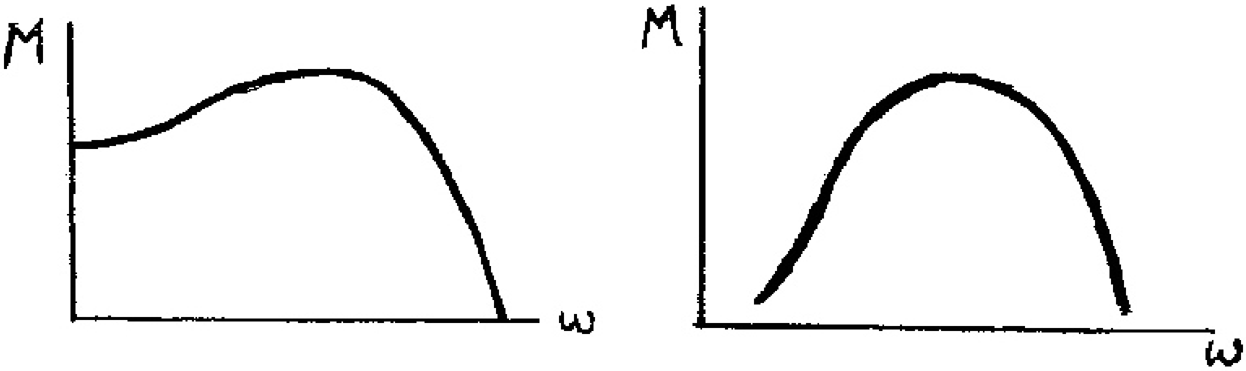

Рис 3.1

Силами вредного сопротивления являются силы трения в кинематических парах, силы гидравлического и аэродинамического сопротивления. Работа этих сил отрицательна.

G - сила тяжести.

Сила тяжести выражается через массу тела по формуле ***G = mg***. Она приложена к телу в центре масс. Работа силы тяжести при опускании центра масс положительна, при поднимании - отрицательна. Работа силы тяжести за полный цикл движения механизма равна нулю.

R – сила реакции в кинематической паре.

Действие одного звена на другое проявляется в виде реакции. По своей природе реакция является силой упругости. Согласно 3-му закону Ньютона реакции двух взаимодействующих тел равны по величине и противоположны по направлению. Для механизма в целом работа сил реакции равна нулю

U – сила инерции.

Объяснить сущность понятия «сила инерции» гораздо сложнее, чем все остальных сил. В то же время это чрезвычайно важно для понимания динамических процессов. Поэтому рассмотрим эту силу долее обстоятельно.

3.3 Сила инерции

Согласно ***2-му закону Ньютона*** *ускорение, сообщаемое телу, пропорционально действующей силе, направлено по той силе и обратно пропорционально массе тела:*

$$\boldsymbol{a = F/m}, \text{ или } \boldsymbol{F = ma}$$

Этот закон справедлив только в *инерциальных системах отсчета*, т.е. в системах покоящихся или движущихся равномерно, прямолинейно относительно абсолютной мировой системы отсчета. В качестве таковой принимают систему с началом в центре Солнца и осями, направленными на три звезды. Земля с некоторым приближением также считается инерциальной системой. Иногда удобно изучать движение в инерциальной системе, т.е. движущейся относительно Земли с ускорением. Для этого случая механика Ньютона, вообще говоря, непригодна. Однако оказалось возможным ее исправить, введя лишь некоторые поправки. Пусть на тело массой **m**, находящееся в сложном движении действует сила **F**. В неподвижной (инерциальной) системе координат ***х,у*** справедлив *закон Ньютона:*

F = ma, где **a** - ускорение в системе ***х,у***. С учетом *кинематической теоремы Кориолиса* можно записать:

$$F = m\,(a^E + a^K + a^R)$$

Перепишем полученное выражение следующим образом:

$$F - m(a^E + a^K) = m\,a^R$$

Эта зависимость определяет закон движения в переносной неинерциальной системе **ξη**. Основываясь на аналогии с формулой, ее можно рассматривать как закон Ньютона для неинерциальной системы. Для этого следует рассматривать левую часть формулы как силу. Выражение

$$U = -\,m\,(a^E + a^K)$$

называют ***силой инерции***. Если тело покоится в системе **ξη**, то $a^K = a^R = 0$, тогда

$$F - ma^E = 0, F + U = 0$$

Таким образом, мы приходим к ***принципу Даламбера:*** сумма активной силы ***F*** и силы инерции ***U***, приложенных к телу, равна нулю. Принцип Даламбера позволяет динамическую задачу свести к задаче на равновесие сил, т.е. к задаче статики.

При решении динамических задач ***возможны два подхода*** – с точки зрения наблюдателей, находящихся в инерциальной и неинерциальной системах. Первый наблюдатель для объяснения явления использует 2-ой закон Ньютона, второй наблюдатель – принцип Даламбера, для чего ему нужно дополнительно к активным силам ввести силы инерции. Оба подхода являются справедливыми и дают правильное решение.

Рассмотрим, например круговое движение тела, закрепленного на нити (рис. 3.2). С точки зрения наблюдателя в системе ***х,у*** движение тела по

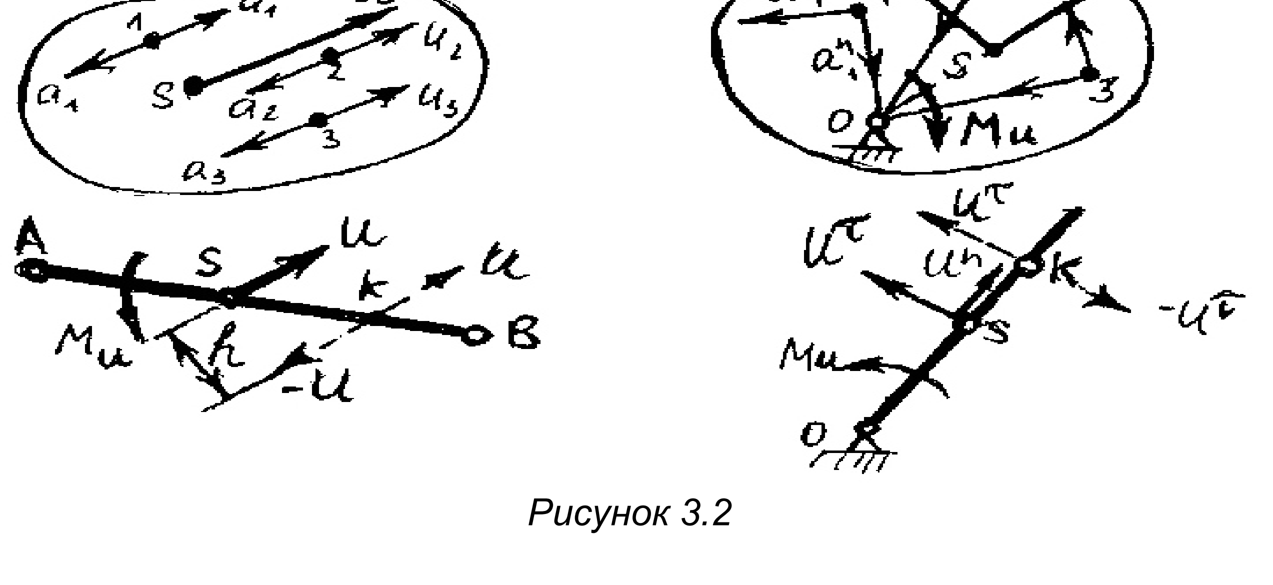

Рисунок 3.2

круговой траектории происходит под действием реакции нити, направленной к центру вращения и действующей в соответствии с законом:

$$R = ma,$$

где $a = \omega^2 R$ - ускорение центра тяжести тела.

R - носит название ***центростремительной силы***.

Для наблюдателя, находящегося в системе $\xi\eta$ тело m не движется. Это возможно только потому, что на него действуют две силы R и U, находящиеся в равновесии. Сила инерции U называется в этом случае ***центробежной силой***.

Для решения обратных задач динамики более удобным является второй подход, так как он приводит к рассмотрению условия равновесия сил. Это объясняет причину широкого использования в технических расчетах сил инерции.

3.4 Силы инерции в поступательном, вращательном и сложном движении

Пусть тело находится в поступательном движении с ускорением. На каждую точку этого тела действуют равные и одинаково направленные силы инерции. Имеем систему равных и параллельных сил. Как известно из теоретической механики, такую систему сил можно привести к одной силе, приложенной в центре масс и равной

$$U = - ma_S$$

Пусть тело вращается вокруг точки **O** с угловой скоростью **ω** и угловым ускорением **ε**. На каждую точку этого тела действует сила инерции, которую можно представить состоящей из касательной и нормальной составляющих силы инерции. В теоретической механике доказывается, что такая система сил приводится к главному вектору и главному моменту сил инерции. Главный вектор сил инерции приложен в центре масс и вычисляется по формуле:

$$U = - ma_S,$$

Где a_S – ускорение центра масс.

Главный момент сил инерции вычисляется по формуле:

$$M_U = - J_S \varepsilon$$

Где J_S – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. Момент инерции вычисляется как интеграл вида:

$$J_S = \int m_i \rho_i^2,$$

Где ρ_i - расстояние от точек, образующих в совокупности данное тело, до центра масс – точки S. Момент инерции зависит как от массы, так и от формы тела, т.е. он определяет геометрию масс. Моменты инерции тел различной формы приводятся в справочниках. Для тела типа стержня:

$J_S = mL^2/12$, где L - длина стержня,

Для диска:

$J_S = m R^2$, где R - радиус диска.

При вращательном движении возможны следующие частные случаи:

1. Вращение вокруг центра масс. В таком случае $OS = 0$, следовательно $U = 0$, $M_u = - J_S\, \varepsilon$.

2. Вращение с постоянной скоростью. В таком случае $\varepsilon = 0$, следовательно $Mu = 0$, $U = - ma$

3. Вращение вокруг центра масс с постоянной скоростью. В таком случае $U = 0$, $M_u = 0$.

Сложное движение можно представить состоящим из поступательного вместе с центром масс и вращательного вокруг центра масс. При поступательном движении с ускорением возникает сила инерции $U = - m\, a_S$, при вращательном движении вокруг центра масс возникает только момент сил инерции $M_u = - J_S\, \varepsilon$. Таким образом, в сложном движении, как и во вращательном, имеется главный вектор сил инерции U и главный момент сил инерции M_u.

Силу и момент можно заменить одной силой. Приложим в точке K силы U и $-U$ (рис.3.2) Это не изменит состояния равновесия тела. Сила - U U в точке S образует пару сил с моментом $M = U\, h$. Если выбрать h из условия $h = M_u / U$, то момент $\mathbf{M}$ компенсирует момент $\mathbf{M_u}$ и останется одна сила $\mathbf{U}$, приложенная в точке K. Для вращающегося тела, имеющего форму стержня длиной L, можно указать простой способ нахождения точки K. Разложим силу U на составляющие U^τ и U^n и приложим в точке K две силы U^τ и - U^τ. Для компенсации M_u необходимо, чтобы $U^\tau\, h = M = M_u$. После соответствующих подстановок найдем

$$H = L / 6,\ OK = 2\, L/ 3$$

Силы инерции звена, совершающего пространственное движение, сводится к главному вектору, вычисляемому как и в плоском случае по формуле $U = - m\, a_S$. И главному моменту сил инерции, который находится на основании динамических уравнений Эйлера. Проекции главного момента на главные центральные оси инерции звена находятся из уравнений:

$$Mux = - J_x\, \varepsilon_x - (J_z - J_y)\, \omega_y \omega_z$$

$$Muy = - J_y\, \varepsilon_z - (J_x - J_z)\, \omega_z \omega_x$$

$$Muz = - J_z\, \varepsilon_z - (J_y - J_x)\, \omega_x \omega_y$$

Где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции звена,

ω_x, ω_y, ω_z, ε_x, ε_y, ε_z, -проекции вектора угловой скорости и вектора углового ускорения на главные центральные оси инерции.

Для того чтобы перейти от проекций на оси, связанные с телом, к проекциям на оси x,y,z, можно воспользоваться матрицей перехода от подвижных осей к осям x,y,z.

3.5 Силовое исследование механизмов методами кинетостатики

В тихоходных механизмах динамические эффекты проявляются незначительно, поэтому усилия можно найти на основании статического расчета, приняв во внимание только движущую силу, силы тяжести, силу трения, силу полезного сопротивления. В быстроходных механизмах следует учитывать динамические эффекты. Проще всего это сделать, если воспользоваться принципом Даламбера. Для этого нужно ко всем внешним силам добавить силы инерции и рассматривать такую систему сил находящейся в равновесии. Такой подход называется ***методом кинетостатики.***

Силы инерции можно рассчитать по приведенным выше формулам. Ускорения центров тяжести звеньев и угловые ускорения находятся на основании кинематического анализа при заданном движении ведущего звена. Кинетостатический расчет обычно выполняется в несколько этапов. На первом этапе силами трения пренебрегают. Определив реакции в кинематических парах, находят силы трения и повторяют расчет с учетом сил инерции.

Все многочисленные ***методы расчета можно разделить на: графические, графоаналитические, аналитические.*** Графические и графоаналитические методы характеризуются относительной простотой реализации. Достоинство аналитических методов – возможность получения большого объема информации.

3.6 Условие статической определимости кинематической цепи

Чтобы решить задачу силового анализа методами статики необходимо, чтобы число уравнений было больше или равнялось числу неизвестных. Это условие носит название ***условия статической определимости системы.***

В качестве неизвестных сил в кинематической цепи выступают силы реакции. Силы, действующие на каждое звено, можно свести к одной силе и моменту, приведя их к центру кинематической пары. Разложим силу и момент на составляющие вдоль выбранных осей пары, Получим три проекции силы и три проекции момента.

Вращательная кинематическая пара (рис. 3.3) накладывает 5 условий связей, разрешая вращение только вокруг одной оси. Тогда под действием одной составляющей момента происходит движение звена, остальные составляющие момента и силы воспринимаются связями. Таким образом, ***во вращательной паре имеется 5 реакций связей.***

Аналогичным образом можно установить, что ***в цилиндрической паре 4 реакции, в сферической – 3, цилиндр на плоскости – 2, шар на плоскости – 1.***

Условие статической определимости пространственной кинематической цепи имеет вид:

$$6n = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5$$

Это условие соответствует уравнению пространственной ассуровской

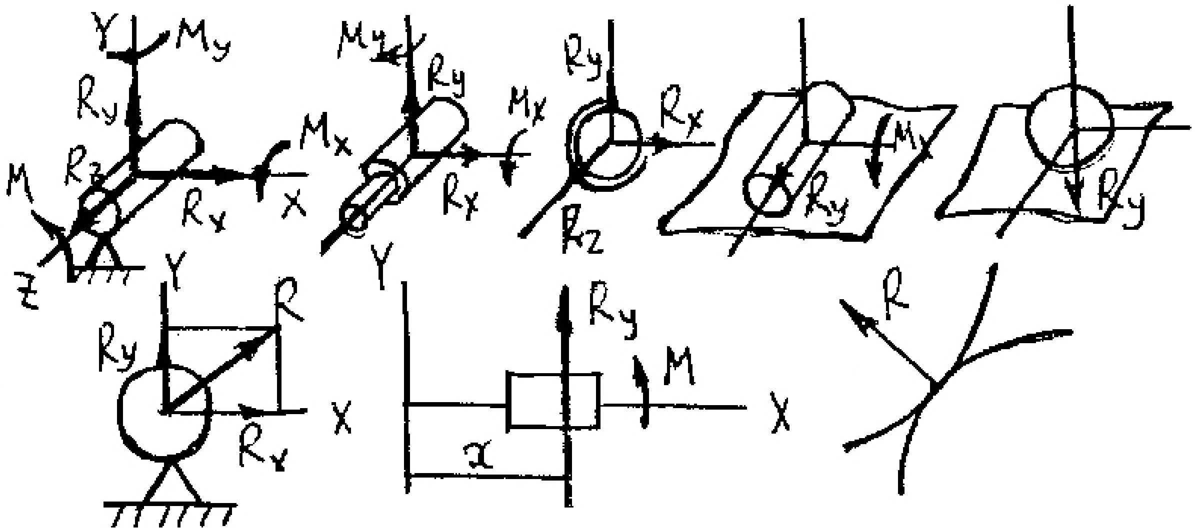

Рис 3.3

группы.

В плоском случае во вращательной паре действует момент и составляющие силы по осям ***x*** и ***y***. Под действием момента происходит движение звена, силы воспринимаются связями. Таким образом, имеем две неизвестных реакции. В поступательной паре под действием составляющей силы вдоль оси **x** происходит движение звена, сила по оси **y** и момент воспринимаются связями, т.е. здесь также две неизвестных. В высшей паре действует только одна сила по нормали к поверхности в точке касания, т.е. имеется одна неизвестная.

Условие статической определимости плоской кинематической цепи

$$3n = 2p_1 + p_2$$

совпадает с уравнением ассуровской группы. Отсюда можно сделать вывод, что ассуровские группы являются статически определимыми системами. Отдельно взятое звено с вращательными парами статически неопределимо, так как число уравнений меньше числа неизвестных. Два звена дают 6 уравнений при 6 неизвестных благодаря тому, что внутренние кинематические пары вносят в систему только две неизвестных. Из изложенного следует, что для выполнения силового исследования, механизм нужно разложить на ассуровские группы и рассматривать их равновесие по отдельности.

3.7 Метод планов сил

Сущность метода планов сил рассмотрим на примере механизма 2 класса с 2-мя диадами (рис. 3.4). Приложим к механизму все заданные внешние силы: момент силы полезного сопротивления $\mathbf{M_Q}$, силы тяжести звеньев $\boldsymbol{Q}$, силы инерции $\boldsymbol{U}$ и момент сил инерции $\boldsymbol{M_u}$, движущую силу $\boldsymbol{P}$. Движущую силу примем равной уравновешивающей силе $\boldsymbol{P_{yp}}$. Под уравновешивающей силой понимают силу, уравновешивающую заданные внешние силы и силы инерции, определенные из условия равномерного вращения кривошипа. Вообще говоря, поскольку истинное движение отличается от равномерного вращения, постольку движущая сила отличается

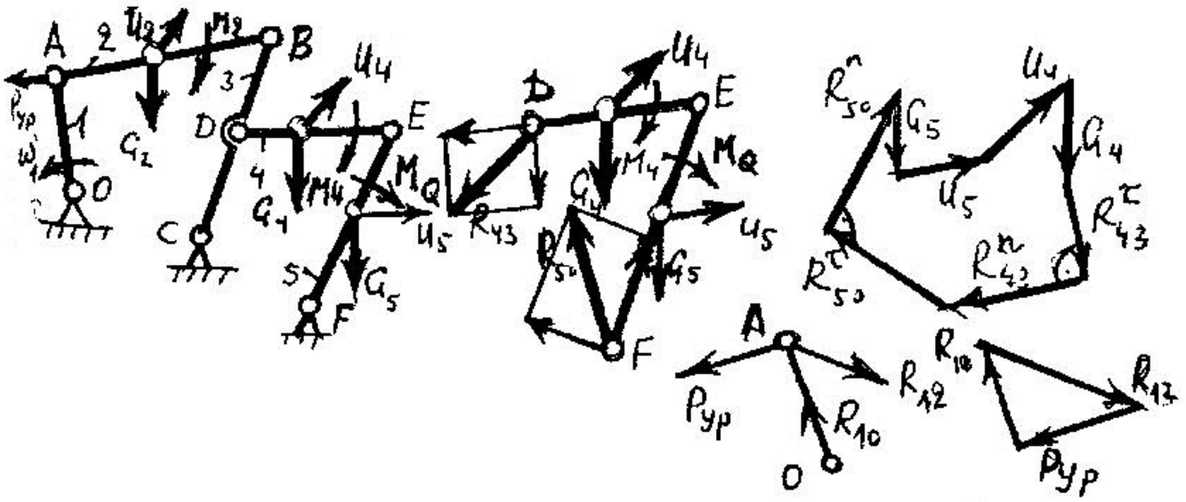

Рис 3.4

от уравновешивающей. Обычно уравновешивающую силу прикладывают в конце кривошипа перпендикулярно к нему. Уравновешивающая сила создает уравновешивающий момент относительно точки $\boldsymbol{O}$.

Задачей силового расчета является определение реакций в кинематических парах и уравновешивающей силы.

Выделим из механизма последнюю диаду, заменив отброшенные звенья реакциями. Условимся буквенные обозначения реакций снабжать индексами, руководствуясь правилом: первым пишется индекс, соответствующий номеру звена, на которое действует реакция, а вторым – индекс, соответствующий номеру звена, со стороны которого действует реакция.

Процедура расчета выполняется по шагам в следующем порядке.

1. Запишем уравнение равновесия диады в векторной форме:

$$\boldsymbol{R_{43}} + \boldsymbol{G_4} + \boldsymbol{U_4} + \boldsymbol{U_5} + \boldsymbol{G_5} + \boldsymbol{R_{50}} = 0$$

Это уравнение содержит две неизвестных реакции и пока не может быть решено.

2. Разложим реакции $\boldsymbol{R_{43}}$, $\boldsymbol{R_{50}}$ на нормальные и касательные составляющие.

3. Запишем уравнение моментов всех сил действующих на звено 4 и звено 5 в отдельности относительно точки **E**.

$$\boldsymbol{M_{4E}} = 0 \quad \rightarrow \boldsymbol{R_{43}^{\tau}}; \qquad \boldsymbol{M_{5E}} = 0 \quad \rightarrow \boldsymbol{R_{50}^{\tau}}$$

В этих уравнениях по одной неизвестной $\boldsymbol{R_{43}^{\tau}}$ и $\boldsymbol{R_{50}^{\tau}}$. Найдем эти неизвестные. Если они получаются со знаком минус, то это означает, что принятые направления найденных реакций следует заменить на обратное.

4. Возвратимся к исходному уравнению равновесия диады, переписав его в следующей форме

$$\boldsymbol{R_{43}^{n} + R_{43}^{\tau} + G_4 + U_4 + U_5 + G_5 + R_{50}^{\tau} + R_{50}^{\tau} = 0}$$

Решим это уравнение графически. Для этого в выбранном масштабе построим многоугольник сил таким образом, чтобы неизвестные $\boldsymbol{R_{43}^{n}}$ и $\boldsymbol{R_{50}^{n}}$ были замыкающими этого многоугольника.

5. Для определения реакций во внутренней кинематической паре запишем уравнение равновесия звена 4:

$$\boldsymbol{R_{43} + G_4 + U_4 + R_{45} = 0}$$

В этом уравнении одно неизвестное $\boldsymbol{R_{45}}$. Для его определения можно не строить отдельный векторный многоугольник, а выделить в многоугольнике диады вектора, входящие в это уравнение, и построить замыкающий вектор.

Перейдем к исследованию диады 2-3. Изобразим ее отдельно, заменив действие отброшенных звеньев реакциями. Расчет диады 2-3 выполняется точно также как и диады 4-5.

Кривошип находится под действием уравновешивающей силы $\boldsymbol{P_{ур}}$, реакции со стороны 2-го звена $\boldsymbol{R_{12}}$, реакции со стороны стойки $\boldsymbol{R_{10}}$. Поскольку $\boldsymbol{P_{ур}}$ и $\boldsymbol{R_{12}}$ приложены в одной точке, они дают равнодействующую, которая уравновешивается реакцией $\boldsymbol{R_{10}}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{R_{10}}$ направлена по звену. Уравнение равновесия кривошипа

$$\boldsymbol{P_{ур} + R_{10} + R_{12} = 0}$$

Из треугольника сил находятся реакции $\boldsymbol{R_{10}}$ и $\boldsymbol{P_{ур}}$.

3.8 Метод рычага Жуковского

Метод рычага Жуковского представляет геометрическую интерпретацию принципа возможных перемещений. Он применяется для плоских механизмов и позволяет определить уравновешивающую силу без предварительного определения реакций в кинематических парах. Принцип возможных перемещений (принцип Даламбера – Лагранжа) находит широкое применение в механике. Он формулируется следующим образом: работа всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю. Этот принцип эквивалентен закону сохранения энергии для механических систем. Он записывается в виде

$$\mathbf{F_K\, \delta\, r_K = 0}$$

Где в левой части стоит сумма скалярных произведений векторов сил $\mathbf{F_K}$ на векторы возможных перемещений точек приложения этих сил $\mathbf{\delta r_K}$.

Разделим выражение (3.3) на $\mathbf{\delta t}$:

$$\mathbf{F_K\, \delta r_K / \delta t = F_k\, V_k = F_K\, V_K\, \cos\, (\, F_k\, V_k)}$$

Рассмотрим элемент плана скоростей, на котором изображена скорость точки $\boldsymbol{K}$. Приложим к точке $\boldsymbol{K}$ вектор $\boldsymbol{F_K}$, изображающий силу $\boldsymbol{F_K}$, повернутую на 90˚ относительно ее истинного направления. Из построения на рис. 3.5 следует:

$$H = pk \cos \alpha = V_K \cos \alpha / \underline{kv} = V_K \cos (F_K V_K) / k_v$$

Если рассматривать отрезок ***kp*** как рычаг, закрепленный в точке ***p***, то сила F_K^* создает момент:

$$M_K = F_K^* h = F_K^* h = F_K^* V_K \cos (F_K V_K) / k_v$$

Из сравнения выражений (3.4) и (3.5) следует, что с точностью до множителя $\mathbf{k_v}$

$$\mathbf{F_K \delta r_k / \delta t = M_K = 0}$$

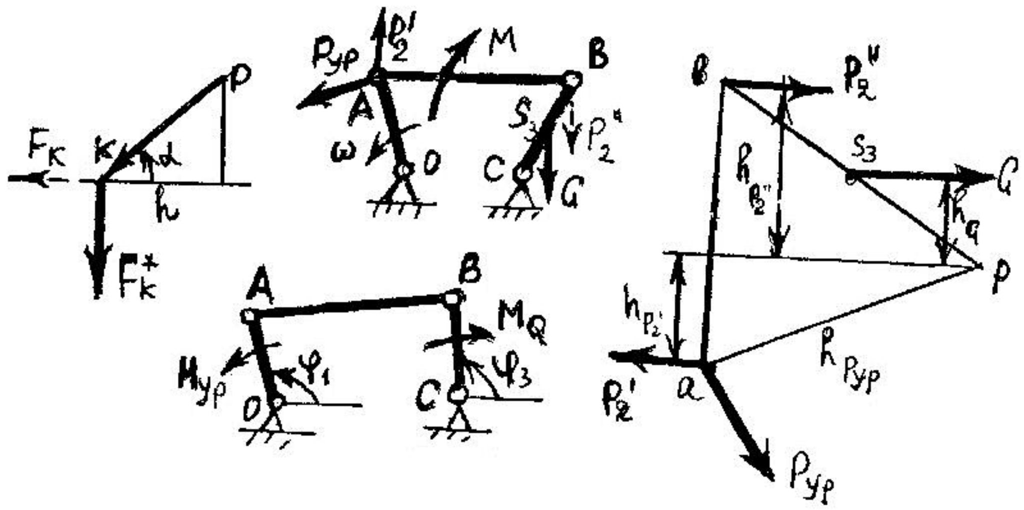

Рис 3.5

Полученный результат известен как теорема Жуковского: если в соответствующие точки плана скоростей механизма приложить все активные силы и силы инерции повернутые на 90º в одну сторону, то сумма моментов этих сил относительно полюса плана скоростей, рассматриваемого как жесткий рычаг, равна нулю. На рис. 3.5 представлен пример использования теоремы Жуковского для определения уравновешивающей силы в шарнирном четырехзвеннике.

Для правильного учета момента ***M*** он заменен парой сил ***(P' = P")*** так, что $M = P_2' L_{AB}$. Уравновешивающая сила определяется из уравнения:

$$P_{yp} h_{yp} + P_2' h_{p2'} + P_2 h_{p2''} + G_3 h_{G3} + Q h_Q = 0$$

При составлении уравнения должно соблюдаться правило знаков: момент, действующий против часовой стрелки, - положительный, по часовой стрелке – отрицательный.

Можно повернуть план скоростей, а силы не поворачивать, результат будет тот же.